

УДК 517

О ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА–ЛАВРЕНТЬЕВА ДЛЯ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© Е. Б. Ланеев

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; задача Коши для уравнения Лапласа; функция Карлемана–Лаврентьева.

Для некорректно поставленной смешанной задачи для уравнения Лапласа построена функция Карлемана–Лаврентьева.

В работе [1] М.М. Лаврентьевым для задачи Коши для уравнения Лапласа рассматривается обобщение функции Карлемана, которое с одной стороны выполняет регуляризующие функции, с другой — позволяет представить (приближенное) решение задачи Коши для уравнения Лапласа в виде интеграла от данных Коши. Таким образом, для некорректных задач предложен аналог функции Грина. Функция Карлемана–Лаврентьева может быть построена непосредственно на основе определения [1]. В [2] на основе метода регуляризации Тихонова [3] получено устойчивое приближенное решение одной смешанной задачи для уравнения Лапласа с данными на поверхности общего вида, аналогичной задаче Коши для уравнения Лапласа. В данной работе из этого приближенного решения в явном виде выделена функция Карлемана–Лаврентьева и доказано, что она является таковой и по определению.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \quad M \in D(F, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\}, \\ u|_S &= f, \quad S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S &= g, \quad F \in C^2(\Pi(0)), \Pi(z) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = \text{const}\}, \\ u|_{x=0, l_x} &= 0, \quad u|_{y=0, l_y} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как на поверхности S ставятся условия Коши, то эта смешанная задача структурно близка к задаче Коши для уравнения Лапласа и является некорректно поставленной. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g . Отметим также, что поверхность S , на которой задаются условия Коши, описывается уравнением $z = F(x, y)$, где F — произвольная дифференцируемая функция, что не позволяет применить для решения задачи (1) метод Фурье непосредственно. В [2] предложен метод решения, применимый для широкого круга задач Коши для эллиптических уравнений и систем, основанный на сведении исходной задачи к интегральному уравнению первого рода, что позволяет, с одной стороны, получить в явном виде точное решение задачи, а с другой — применить схему регуляризации Тихонова [3] для получения устойчивого решения.

Пусть функции f и g в задаче (1) заданы с погрешностью, т. е. вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ , такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leq \text{Const} \cdot \delta.$$

Приведем приближенное решение задачи (1) в этом случае, сходящееся к точному решению при $\delta \rightarrow 0$, а также получим интегральное представление приближенного решения, аналогичное представлению решения задачи Дирихле, использующее функцию Грина.

2. Устойчивое решение

В [2] на основе метода регуляризации Тихонова [3] получено устойчивое приближенное решение задачи (1)

$$u_{\alpha}^{\delta}(M) = v_{\alpha}^{\delta}(M) - \Phi^{\delta}(M), \quad M \in D(F, H), \quad (2)$$

где

$$\Phi^{\delta}(M) = \int_S [-g^{\delta}(P)\varphi(M, P) + f^{\delta}(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P)] d\sigma_P. \quad (3)$$

Функция $\varphi(M, P)$ — функция источника задачи

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= \rho, & M \in D^{\infty} &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\}, \\ u|_{x=0, l_x} &= 0, & u|_{y=0, l_y} &= 0, \\ u &\rightarrow 0 & \text{при } |z| &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. е.

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M, P),$$

где $W(M, P)$ — гармоническая функция по P .

Функцию источника можно получить в виде ряда Фурье

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} |z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \quad (4)$$

Функция v_{α}^{δ} в (2) получена в виде ряда Фурье с регуляризующим множителем и параметром регуляризации α

$$v_{\alpha}^{\delta}(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^{\delta}(a) e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - a)}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{\Phi}_{nm}^{\delta}(a) = \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} \Phi^{\delta}(x, y, a) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy \quad (6)$$

— коэффициенты Фурье функции Φ^{δ} вида (3) при $z = a$, $a < \min_{(x,y) \in \Pi(0)} F(x, y)$.

Для приближенного решения (2) в [2] доказана

Т е о р е м а. Пусть решение задачи (1) существует в области $D(F, H)$. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ функция $u_{\alpha(\delta)}^{\delta}$ вида (2) равномерно сходится при $\delta \rightarrow 0$ к точному решению в $D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$, $H - a \gg \varepsilon > 0$.

Отметим, что при отсутствии погрешности в данных f и g , т. е. при $\delta = 0$ формулы (2)-(6) при $\alpha = 0$ дают точное решение задачи (1).

3. Функция Карлемана-Лаврентьева

Получим теперь представление приближенного решения (2) задачи (1)

$$u_{\alpha}^{\delta}(M) = v_{\alpha}^{\delta}(M) - \Phi^{\delta}(M), \quad M \in D(F, H)$$

в виде интеграла по поверхности S , на которой заданы функции f и g . Получим функцию v_{α}^{δ} (5) в виде интеграла по поверхности S :

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^{\delta}(M) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^{\delta}(a) e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(H - a)}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(H - a)}} \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} dx dy \Phi^{\delta}(x, y, a) \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(H - a)}} \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} dx' dy' \int_S [-g^{\delta}(P) \varphi(M', P) + \\ &\quad + f^{\delta}(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M', P)] d\sigma_P \sin \frac{\pi n x'}{l_x} \sin \frac{\pi m y'}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (7) \end{aligned}$$

Используя представление (4) для фундаментального решения φ и ортогональность системы функций

$$\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right\}_{n,m=1}^{\infty},$$

получим

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^{\delta}(M) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(H - a)}} \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} dx' dy' \int_S [-g^{\delta}(P) \varphi(M', P) + \\ &\quad + f^{\delta}(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M', P)] d\sigma_P \sin \frac{\pi n x'}{l_x} \sin \frac{\pi m y'}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(H - a)}} \int_S [-g^{\delta}(P) \frac{2}{\pi l_x l_y} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(a - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} + \\ &\quad + f^{\delta}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{2}{\pi l_x l_y} \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}(a - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}] d\sigma_P \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_S [-g^\delta(P) \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha e^{\frac{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}} \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \\
&\quad \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} + \\
&\quad + f^\delta(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha e^{\frac{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}} \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \\
&\quad \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}] d\sigma_P \quad (8)
\end{aligned}$$

Обозначая

$$V_\alpha(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha e^{\frac{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}} \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \\
\times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (9)$$

получим v_α^δ в виде интеграла

$$v_\alpha^\delta(M) = \int_S [-g^\delta(P) V_\alpha(M, P) + f^\delta(P) \frac{\partial V_\alpha}{\partial n_P}(M, P)] d\sigma_P. \quad (10)$$

Приближенное решение (2) с учетом представления (3) для функции Φ^δ теперь можно записать в виде интеграла по поверхности S

$$\begin{aligned}
u_\alpha^\delta(M) &= \int_S [-g^\delta(P) V_\alpha(M, P) + f^\delta(P) \frac{\partial V_\alpha}{\partial n_P}(M, P)] d\sigma_P - \\
&\quad - \int_S [-g^\delta(P) \varphi(M, P) + f^\delta(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P)] d\sigma_P = \\
&= \int_S [-g^\delta(P) C_\alpha(M, P) + f^\delta(P) \frac{\partial C_\alpha}{\partial n_P}(M, P)] d\sigma_P, \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_\alpha(M, P) &= \varphi(M, P) + V_\alpha(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W_\alpha(M, P) = \\
&= \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}|z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} - \\
&\quad - \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha e^{\frac{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}} \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \\
&\quad \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad a < \min_{(x,y) \in \Pi(0)} F(x, y), \quad (12)
\end{aligned}$$

имеет смысл функции Карлемана–Лаврентьева [1], которая в отличие от условий, сформулированных в [1], должна удовлетворять еще и граничным условиям первого рода на боковых гранях цилиндра. Таким образом, функция Карлемана–Лаврентьева для задачи (1) определяется тремя следующими условиями.

I. Функция Карлемана–Лаврентьева имеет вид:

$$C_\alpha(M, P) = \varphi(M, P) + V_\alpha(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W_\alpha(M, P)$$

причем функция $W_\alpha(M, P)$ гармонична по P в $D(F, H)$

II.

$$\int_{\Pi(H)} \left[|C_\alpha(M, P)| + \left| \frac{\partial C_\alpha}{\partial n_P}(M, P) \right| \right] d\sigma_P \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0 \quad (13)$$

равномерно по M на любом компакте в $D(F, H)$.

III. Функция $C_\alpha(M, P)$ удовлетворяет граничным условиям по P

$$C_\alpha(M, P)|_{x_P=0, l_x} = 0, \quad C_\alpha(M, P)|_{y_P=0, l_y} = 0$$

Очевидно, функция C_α вида (12) удовлетворяет условиям I и III. Проверим выполнение условия II. Для первого интеграла в (13), используя (12) при $z_P = H$ и $z_P > z_M$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi(H)} |C_\alpha(M, P)| d\sigma_P &= \\ &= \int_{\Pi(H)} \left| \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \right. \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \Big| dx_P dy_P \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - H)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}. \quad (14) \end{aligned}$$

Считая, что расстояние до компакта равно ε , и $z_M - H < \varepsilon$, получаем

$$\int_{\Pi(H)} |C_\alpha(M, P)| d\sigma_P \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}} \cdot \frac{e^{-\pi\varepsilon\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}.$$

Для последнего ряда ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\varepsilon\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}$$

является мажорантным, и, таким образом, можно переходить к пределу по α

$$\int_{\Pi(H)} |C_\alpha(M, P)| d\sigma_P \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}} \cdot \frac{e^{-\pi\varepsilon\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Аналогично оценивается интеграл от второго слагаемого в (13) и, таким образом, условие II также выполнено. Это означает, что функция S_α является функцией Карлемана–Лаврентьева по определению, и она позволяет выразить приближенное решения задачи в виде интегрального представления (11) решения через данные Коши f и g .

По аналогии с функцией Грина функцию Карлемана–Лаврентьева можно связывать с областью, на границе которой задаются однородные граничные условия, а также условия вида (13). Так функцию (12) можно называть функцией Карлемана–Лаврентьева для полуцилиндра прямоугольного сечения $D(-\infty, H)$, на основе которой можно получить приближенное решение задачи (1) в $D(F, H)$ вида (11) для любой функции F и данных f и g .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. Ланев Е.Б., Васудеван Бхувана. Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика. 1999. № 1. С. 128-133.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00506).

Поступила в редакцию 27 августа 2014 г.

Laneev E.B.

CARLEMAN-LAVRENTIEV FUNCTION FOR ONE ILL-POSED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION

For ill-posed mixed problem for Laplace equation built Carleman–Lavrentiev function.

Key words: ill-posed problem; Cauchy problem for the Laplace equation; Carleman–Lavrentiev function.

Ланев Евгений Борисович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Laneev Evgeniy Borisovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru